第３講　対数の計算

3　次の各問いに答えよ．

(1)　$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ を示せ．ただし，a は１でない正の定数，x，y はともに正の実数とする．

(2)　$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とするとき，$\log_{10} 48$ と $\log_{10} 50$ の値をそれぞれ求めよ．また，$\log_{10} 7$ の小数第１位と第２位の数を求めよ．

(3)　a を１でない正の実数とする．不等式

$$\log_{\sqrt{a}}(3-x) - \frac{1}{\log_2 a} > \log_a(x+2) + 1$$

を満たす整数 x がただ１つ存在するための a の満たす条件を求めよ．

(4)　$2\log_y x - \log_x y > -1$ を満たす点 $(x,\ y)$ が存在する領域を図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　対数の計算

3　次の各問いに答えよ．

(1)　$\log_2 2352$ の値を四捨五入して小数第 2 位まで求めよ．次に，$6<2^{\sqrt{7}}<7$ であることを示せ．さらに，$\dfrac{7}{5}<\log_2(\log_2 7)<\dfrac{3}{2}$ であることを示せ．

ただし，$\log_2 3=1.5850$，$\log_2 7=2.8074$ とする．

(2)　次の連立方程式が実数解をもつための a の値の範囲を示し，解を求めよ．

$$\begin{cases} 2+\log_x y-\log_x a=2\log_{x^2}(ax+3)+\log_x(x-a+1) \\ (5+3\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^{ax}=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})^{y} \end{cases}$$

【選択肢】

(1)　㋐　11.20　　㋑　11.22　　㋒　11.19

(2)　㋐　a の範囲：$0<a<1$，$1<a<\dfrac{4}{3}$

$$解：x=\begin{cases} \dfrac{a+\sqrt{4a-3a^2}}{2} & (0<a<1) \\ \dfrac{a\pm\sqrt{4a-3a^2}}{2} & \left(1<a<\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

㋑　a の範囲：$0<a<1$，$1<a\leqq\dfrac{4}{3}$

$$解：x=\begin{cases} \dfrac{a+\sqrt{4a-3a^2}}{2} & (0<a<1) \\ \dfrac{a\pm\sqrt{4a-3a^2}}{2} & \left(1<a\leqq\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

㋒　a の範囲：$0\leqq a<1$，$1<a\leqq\dfrac{4}{3}$

$$解：x=\begin{cases} \dfrac{a+\sqrt{4a-3a^2}}{2} & (0\leqq a<1) \\ \dfrac{a\pm\sqrt{4a-3a^2}}{2} & \left(1<a\leqq\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　対数の計算

3　次の各問いに答えよ．

(1)　$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$ を示せ．ただし，a は1でない正の定数，x，y はともに正の実数とする．

(2)　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とするとき，$\log_{10}48$ と $\log_{10}50$ の値をそれぞれ求めよ．また，$\log_{10}7$ の小数第1位と第2位の数を求めよ．

(3)　a を1でない正の実数とする．不等式

$$\log_{\sqrt{a}}(3-x)-\frac{1}{\log_2 a}>\log_a(x+2)+1$$

を満たす整数 x がただ1つ存在するための a の満たす条件を求めよ．

(4)　$2\log_y x-\log_x y>-1$ を満たす点 $(x,\ y)$ が存在する領域を図示せよ．

【答】 (1) 略　(2) $\log_{10}48=1.6811$，$\log_{10}50=1.6990$，小数第1位は8，小数第2位は4

(3) $\frac{1}{8}<a\leqq\frac{2}{3}$，$\frac{9}{4}\leqq a<8$　(4) 略

【解答】

(1)　$\log_a xy=p$，$\log_a x=q$，$\log_a y=r$ とおくと，$a^p=xy$，$a^q=x$，$a^r=y$ より

$a^p=a^q a^r$ すなわち $a^p=a^{q+r}$　　$\therefore\ \ p=q+r$

よって，$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(2)　$\log_{10}48=4\log_{10}2+\log_{10}3=4\times0.3010+0.4771=\mathbf{1.6811}$

$\log_{10}50=\log_{10}100-\log_{10}2=2-0.3010=\mathbf{1.6990}$

ここで $\log_{10}48<\log_{10}49<\log_{10}50$ より　$1.6811<2\log_{10}7<1.6990$

$0.84055<\log_{10}7<0.8495$

となるので，$\log_{10}7$ の小数第1位は**8**，小数第2位は**4**

(3)　真数条件より，$3-x>0$ かつ $x+2>0$　　$\therefore\ \ -2<x<3$

$$\log_{\sqrt{a}}(3-x)=\log_a(3-x)^2,\qquad \frac{1}{\log_2 a}=\log_a 2$$

であることより，与式は

$$\log_a(3-x)^2-\log_a 2>\log_a(x+2)+\log_a a$$

$$\log_a\frac{(x-3)^2}{2}>\log_a a(x+2)$$

$$\begin{cases}(x-3)^2>2a(x+2)\quad(a>1) & \cdots\cdots①\\(x-3)^2<2a(x+2)\quad(0<a<1) & \cdots\cdots②\end{cases}$$

ここで $y=(x-3)^2$ と $y=2(x+2)$ のグラフの共有点の x 座標は $(x-3)^2=2(x+2)$ より $x=4\pm\sqrt{11}$ となるので，$-2<x<3$ の区間に与式を満たす整数解が1つだけ存在する条件は

(Ⅰ)　$a>1$ のとき，$x=-1$ がただ1つの解となるため

①は $x=-1$ で成り立ち，$x=0$ では成り立たない．すなわち

$$\{(-1)-3\}^2>2a(-1+2)\quad かつ\quad (0-3)^2\leqq2a(0+2)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\therefore\ \dfrac{9}{4} \leqq a < 8$　（$a>1$ を満たす）

(Ⅱ)　$0<a<1$ のとき，$x=2$ がただ１つの解となるため

②は $x=2$ で成り立ち，$x=1$ では成り立たない．すなわち

$(2-3)^2 < 2a(2+2)$　かつ　$(1-3)^2 \geqq 2a(1+2)$

$\therefore\ \dfrac{1}{8} < a \leqq \dfrac{2}{3}$　（$0<a<1$ を満たす）

(Ⅰ)，(Ⅱ)より　$\boldsymbol{\dfrac{1}{8} < a \leqq \dfrac{2}{3},\ \dfrac{9}{4} \leqq a < 8}$

(4)　真数条件より，$y>0$　かつ　$x>0$

底の条件より，$x>0$，$x\neq 1$　かつ　$y>0$，$y\neq 1$

よって　$x>0$，$x\neq 1$，$y>0$，$y\neq 1$

この条件のもとで，与式は

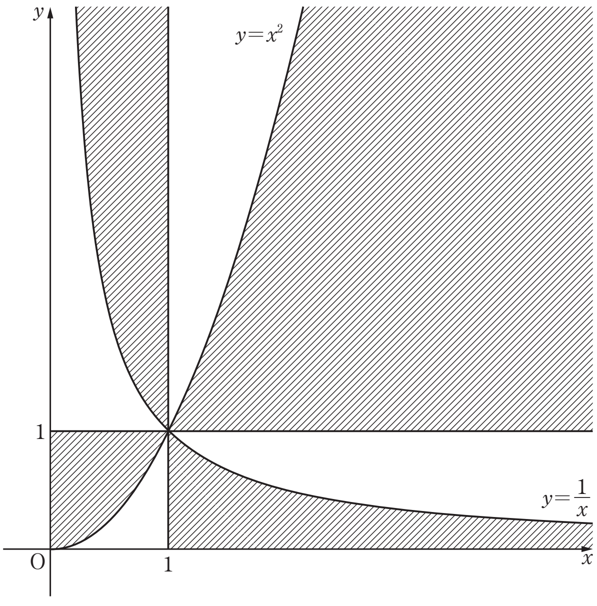
$$\log_x y - \frac{2}{\log_x y} < 1$$

$$\log_x y(\log_x y - 2)(\log_x y + 1) < 0$$

$$\log_x y < -1,\ 0 < \log_x y < 2$$

$$\begin{cases} y < \dfrac{1}{x},\ 1 < y < x^2 & (x>1) \\ y > \dfrac{1}{x},\ x^2 < y < 1 & (0<x<1) \end{cases}$$

よって求める領域は，下図の境界を含まない斜線部分．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　対数の計算

3　次の各問いに答えよ．

(1)　$\log_2 2352$ の値を四捨五入して小数第２位まで求めよ．次に，$6<2^{\sqrt{7}}<7$ であることを示せ．さらに，$\dfrac{7}{5}<\log_2(\log_2 7)<\dfrac{3}{2}$ であることを示せ．

ただし，$\log_2 3=1.5850$，$\log_2 7=2.8074$ とする．

(2)　次の連立方程式が実数解をもつための a の値の範囲を示し，解を求めよ．

$$\begin{cases} 2+\log_x y-\log_x a=2\log_{x^2}(ax+3)+\log_x(x-a+1) \\ (5+3\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^{ax}=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})^y \end{cases}$$

【選択肢】

(1)　㋐　11.20　　㋑　11.22　　㋒　11.19

(2)　㋐　a の範囲：$0<a<1$，$1<a<\dfrac{4}{3}$

$$\text{解}：x=\begin{cases} \dfrac{a+\sqrt{4a-3a^2}}{2} & (0<a<1) \\ \dfrac{a\pm\sqrt{4a-3a^2}}{2} & \left(1<a<\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

㋑　a の範囲：$0<a<1$，$1<a\leqq\dfrac{4}{3}$

$$\text{解}：x=\begin{cases} \dfrac{a+\sqrt{4a-3a^2}}{2} & (0<a<1) \\ \dfrac{a\pm\sqrt{4a-3a^2}}{2} & \left(1<a\leqq\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

㋒　a の範囲：$0\leqq a<1$，$1<a\leqq\dfrac{4}{3}$

$$\text{解}：x=\begin{cases} \dfrac{a+\sqrt{4a-3a^2}}{2} & (0\leqq a<1) \\ \dfrac{a\pm\sqrt{4a-3a^2}}{2} & \left(1<a\leqq\dfrac{4}{3}\right) \end{cases}$$

【答】　(1)　㋐　(2)　㋑

【解答】

(1)　$\log_2 2352=\log_2(2^4\cdot 3\cdot 7^2)$

$=4+\log_2 3+2\log_2 7$

$=4+1.5850+2\times 2.8074=11.1998$

よって求める値は，**11.20**

次に

$$\log_2 6=\log_2 2+\log_2 3=2.5850$$

$$\log_2 7=2.8074$$

より

$$6=2^{2.5850},\quad 7=2^{2.8074}$$

ここで $2.6^2=6.76$，$2.7^2=7.29$ より

$$2.6<\sqrt{7}<2.7 \quad \cdots\cdots①$$

よって

$$6=2^{2.5850}<2^{2.6}<2^{\sqrt{7}}<2^{2.7}<2^{2.8074}=7$$

すなわち　$6<2^{\sqrt{7}}<7$

　また，題意より $2^{\frac{7}{5}}<\log_2 7<2^{\frac{3}{2}}$ を示せばよい．

$2^{14}=16384<16807=7^5$ であるから $2^{\frac{7}{5}}<\sqrt{7}$ となる．さらに①より $\sqrt{7}<\log_2 7$ なので

$$2^{\frac{7}{5}}<\log_2 7$$

また $(\log_2 7)^2<2.81^2=7.8961<8$ であるから

$$\log_2 7<2.81<\sqrt{8}=2^{\frac{3}{2}}$$

これより　$2^{\frac{7}{5}}<\log_2 7<2^{\frac{3}{2}}$

よって　$\dfrac{7}{5}<\log_2(\log_2 7)<\dfrac{3}{2}$

(2)　真数条件より　$y>0$，$a>0$，$ax+3>0$，$x>a-1$

また，底の条件より　$x>0$，$x\neq 1$

　この条件のもとで

$$2\log_{x^2}(ax+3)=\log_x(ax+3),\quad 2=\log_x x^2$$

より，第一式は

$$\begin{aligned}\log_x y&=\log_x(ax+3)+\log_x(x-a+1)+\log_x a-\log_x x^2\\&=\log_x\frac{a(ax+3)(x-a+1)}{x^2}\\ \therefore\quad y&=\frac{a(ax+3)(x-a+1)}{x^2}\end{aligned}$$

また，$2(5+3\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})^3$ より第二式は

$$\begin{aligned}2(5+3\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^{ax}&=(1+\sqrt{3})^y\\(1+\sqrt{3})^{ax+3}&=(1+\sqrt{3})^y\\ \therefore\quad y&=ax+3\end{aligned}$$

以上より

$$\frac{a(ax+3)(x-a+1)}{x^2}=ax+3$$

$$a(x-a+1)=x^2 \quad \cdots\cdots②$$

となるので，この方程式が真数と底の条件を満たす範囲で解をもつ条件を考えればよいが，その条件は直線 $y=a(x-a+1)$ と放物線 $y=x^2$ が

$$x>0 \quad かつ \quad x>a-1 \quad かつ \quad x\neq 1$$

を満たす範囲に共有点をもつことと同じである．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，$a=1$ とすると②より $x=0$，1 となり条件を満たさないので，$a\neq1$ である．

(Ⅰ)　$a-1<0$ すなわち $a<1$ のとき，$y=a(x-a+1)$ は傾き a，点 $(a-1,\ 0)$ を通る直線であるので，$a>0$ であればよい．

$$\boldsymbol{0<a<1}$$

(Ⅱ)　$a-1>0$ すなわち $a>1$ のとき，直線と放物線が共有点をもてばよい．

$x^2-ax+a^2-a=0$ より，判別式を D とすると

$$D=a^2-4(a^2-a)\geqq0$$

$$-3a\left(a-\frac{4}{3}\right)\geqq0$$

$$\therefore\quad 0\leqq a\leqq\frac{4}{3}$$

よって

$$\boldsymbol{1<a\leqq\frac{4}{3}}$$

(Ⅰ)，(Ⅱ)より，条件 $x>0$，$a>0$ を考えると求める解は

$$\boldsymbol{x=\begin{cases}\dfrac{a+\sqrt{4a-3a^2}}{2} & (0<a<1)\\[2ex] \dfrac{a\pm\sqrt{4a-3a^2}}{2} & \left(1<a\leqq\dfrac{4}{3}\right)\end{cases}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。